PART3　x^2+x+1 と虚数立方根

3　(1)　a，b が実数，z が虚数のとき

$$a+bz=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

であることを証明せよ。

(2)　$P(x)=x^{11}$ とする。$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ。

Point Pickup

方程式 $x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω とすると，ω は虚数解であり

$$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$$

である。これを利用し，$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを，$P(\omega)$ の値から求めることができる。

第 3 講　PART3　確認問題

1　a，b が実数，z が虚数のとき

「$a+bz=0$」$\Longleftrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」

であることを証明せよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

「$a=0$ かつ $b=0$」$\Longrightarrow$「$a+bz=0$」

は明らかに成り立つ。

「$a+bz=0$」$\Longrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」

を示す。

[ア] ……(＊)　と仮定すると，$a+bz=0$ より　$z=$ [イ]

a，b が実数，z が虚数であるから，

$z=$ [イ] の左辺は [ウ]，右辺は [エ]

となり，矛盾する。

よって，(＊)の仮定は誤りであるから　$b=$ [オ]

このとき，$a+bz=0$ より　$a=$ [カ]

したがって，「$a+bz=0$」$\Longleftrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」である。

[[ア] の選択肢]

① $b<0$　② $b>0$　③ $b=0$

④ $b\neq0$　⑤ b は実数　⑥ b は虚数

[[イ] の選択肢]

① 0　② $-a$　③ $-b$　④ $-\dfrac{a}{b}$　⑤ $-\dfrac{b}{a}$

[[ウ]，[エ] の選択肢]

① 実数　② 虚数

2 $P(x)=2x^{20}+x^{10}$ とする。

$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを $ax+b$ とするとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。

$a=$ **キク**，$b=$ **ケコ**

[MEMO]

PART3　x^2+x+1 と虚数立方根

3 (1) a, b が実数, z が虚数のとき

$$a+bz=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

であることを証明せよ。

(2) $P(x)=x^{11}$ とする。$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ。

(1) $a=0$ かつ $b=0 \Longrightarrow a+bz=0$ は明らかに成り立つ。

$a+bz=0 \Longrightarrow a=0$ かつ $b=0$ を示す。

$b \neq 0$ と仮定すると, $a+bz=0$ より　$z=-\dfrac{a}{b}$

a, b が実数, z が虚数であるから, $z=-\dfrac{a}{b}$ の左辺は虚数, 右辺は実数となり, 矛盾する。

よって　$b=0$　　このとき　$a=0$

したがって, a, b が実数, z が虚数のとき

$$a+bz=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

(2) $P(x)=x^{11}$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ (a, b は実数) とすると

$$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$$

ここで, 2次方程式 $x^2+x+1=0$ の解の1つを ω とすると, ω は虚数解であり

$$\omega^2+\omega+1=0$$

$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ であるから　$\omega^3=1$

このとき　$P(\omega)=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b=a\omega+b$ …… ①

また, $P(\omega)=\omega^{11}=(\omega^3)^3\cdot\omega^2=1\cdot(-\omega-1)=-\omega-1$ …… ②

①, ②より　$a\omega+b=-\omega-1$

すなわち　$(b+1)+(a+1)\omega=0$

a, b は実数であるから $a+1$, $b+1$ も実数である。

よって, (1)から　$b+1=0$, $a+1=0$

すなわち　$a=-1$, $b=-1$

したがって, 求める余りは　$-x-1$

第 3 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：④，イ：④，ウ：②，エ：①，オ：0，
カ：0

[解説]

「$a=0$ かつ $b=0$」$\Longrightarrow$「$a+bz=0$」

は明らかに成り立つ。

「$a+bz=0$」$\Longrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」

を示す。

$\boldsymbol{b \neq 0}$　……(＊)　と仮定すると，$a+bz=0$ より [A]

$$z=-\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

a，b が実数，z が虚数であるから，

$z=-\dfrac{a}{b}$ の左辺は**虚数**，右辺は**実数**

となり，矛盾する。

よって，(＊)の仮定は誤りであるから　$b=\boldsymbol{0}$

このとき，$a+bz=0$ より　$a=\boldsymbol{0}$

したがって，「$a+bz=0$」$\Longleftrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」

である。

[A]　背理法を利用して証明する。
命題の証明において，その命題が成り立たないと仮定し，矛盾を導くことによって，もとの命題が正しいことを証明する方法を背理法という。

2 **[正解]** キク：-1，ケコ：-2

[解説]

$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$$

ここで，2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω とすると，ω は虚数解であり [B]

$$\omega^2+\omega+1=0$$

$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)$ より，$\omega^3-1=0$ であるから [C]

$$\omega^3=1$$

このとき

$$P(\omega)=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b$$
$$=a\omega+b \cdots\cdots ①$$

また

$$P(\omega)=2\omega^{20}+\omega^{10}=2\omega^{3\cdot6+2}+\omega^{3\cdot3+1}$$
$$=2(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega$$
$$=2\cdot1^6\cdot\omega^2+1^3\cdot\omega$$
$$=2(-\omega-1)+\omega=-\omega-2 \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$a\omega+b=-\omega-2$$ [D]

a，b は実数，ω は虚数であるから

$$\boldsymbol{a=-1,\ b=-2}$$

このとき，余りは　$-x-2$

[B]　2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω とすると，ω は虚数解であり

$\omega^2+\omega+1=0$

$\omega^3=1$

[C]　3 次式の因数分解

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

[D]　a，b，c，d が実数，z が虚数のとき

$a+bz=c+dz$

$\Longleftrightarrow a=c,\ b=d$

特に

$a+bz=0$

$\Longleftrightarrow a=0,\ b=0$